Εισαγωγή στην Τοπολογία, 21/9/2018, Α. Τόλιας

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1.

(α) Ένα ζεύγος (X,ρ) λέγεται μετρικός χώρος, αν X είναι ένα μη κενό σύνολο και ρ μια μετρική στο X, δηλαδή μια συνάρτηση $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με:
(i) $\rho(x,y) \geq 0$ και $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ για κάθε $x,y \in X$.
(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ για κάθε $x,y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).
(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ για κάθε $x,y,z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Ένα υποσύνολο A του X καλείται ανοικτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq A$ [ο ορισμός του $B_\rho(x,\varepsilon)$ υπάρχει στο ερώτημα (β).] Ένα υποσύνολο A του X καλείται κλειστό αν το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $X \setminus A$, είναι ανοικτό.

Έστω A,B δυο ανοικτά υποσύνολα του X. Θα δείξουμε ότι το $A \cap B$ είναι ανοικτό. Έστω $x \in A \cap B$. Τότε $x \in A$ και $x \in B$. Εφόσον το A είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_1) \subseteq A$, ενώ εφόσον το B είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_2 > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_2) \subseteq B$. Θέτοντας $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ έχουμε $\varepsilon > 0$ και $B_\rho(x,\varepsilon) = B_\rho(x,\varepsilon_1) \cap B_\rho(x,\varepsilon_2) \subseteq A \cap B$. Επομένως το $A \cap B$ είναι ανοικτό.

(β) Η ανοικτή μπάλα κέντρου x_0 και ακτίνας ε είναι το σύνολο

$$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \ \rho(x,x_0) < \varepsilon\}$$

και η κλειστή μπάλα κέντρου x_0 και ακτίνας ε είναι τα σύνολο

$$\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \ \rho(x,x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Δείχνουμε τώρα ότι το σύνολο $B_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in B_\rho(x_0,\varepsilon)$. Τότε $\rho(y,x_0) < \varepsilon$ άρα $\varepsilon - \rho(y,x_0) > 0$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon - \rho(y,x_0)$. Θα δείξουμε ότι $B_\rho(y,\delta) \subseteq B_\rho(x_0,\varepsilon)$. Πράγματι έστω $z \in B_\rho(y,\delta)$. Τότε $\rho(z,y) < \delta$ και άρα, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα,

$$\rho(z,x_0) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x_0) < \delta + \rho(y,x_0) = \varepsilon - \rho(y,x_0) + \rho(y,x_0) = \varepsilon$$

συνεπώς $z \in B_\rho(x_0,\varepsilon)$. Έτσι έχει δειχθεί ότι για κάθε $y \in B_\rho(x_0,\varepsilon)$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(y,\delta) \subseteq B_\rho(x_0,\varepsilon)$. Επομένως το σύνολο $B_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτό.

Δείχνουμε τώρα ότι το σύνολο $\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι κλειστό. Αρκεί, σύμφωνα με τον ορισμό, να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $A = X \setminus \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in A$. Τότε $y \notin \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ δηλαδή δεν ισχύει $\rho(y,x_0) \leq \varepsilon$ και άρα ισχύει $\rho(y,x_0) > \varepsilon$, συνεπώς $\rho(y,x_0) - \varepsilon > 0$. Έτσι, θέτοντας $\delta = \rho(y,x_0) - \varepsilon$ έχουμε $\delta > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\rho(y,\delta) \subseteq A$. [Πράγματι έστω $z \in B_\rho(y,\delta)$. Τότε $\rho(z,y) < \delta$. Θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο, ότι $z \in A$. Αν $z \notin A$ τότε $z \in \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ δηλαδή $\rho(z,x_0) \leq \varepsilon$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και τη συμμετρική ιδιότητα προκύπτει

$$\rho(y,x_0) \leq \rho(y,z) + \rho(z,x_0) = \rho(z,y) + \rho(z,x_0) < \delta + \varepsilon = \rho(y,x_0)$$

άτοπο. Συνεπώς $z \in A$.] Έτσι δείχθηκε ότι το σύνολο A είναι ανοικτό, επομένως το σύνολο $\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι κλειστό.

Θέμα 2.

Έστω Γ, Δ δυο μη κενά υποσύνολα του X. Εξ' ορισμού

$$\rho(\Gamma,\Delta)=\inf\{\rho(x,y):\ x\in\Gamma,\ y\in\Delta\} \quad \text{και} \quad \rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})=\inf\{\rho(x,y):\ x\in\overline{\Gamma},\ y\in\overline{\Delta}\}.$$

Εφόσον $\Gamma\subseteq\overline{\Gamma}$ και $\Delta\subseteq\overline{\Delta}$ έχουμε

$$\{\rho(x,y):\ x\in\Gamma,\ y\in\Delta\}\subseteq\{\rho(x,y):\ x\in\overline{\Gamma},\ y\in\overline{\Delta}\}$$

και άρα

$$\inf\{\rho(x,y):\ x\in\overline{\Gamma},\ y\in\overline{\Delta}\}\le\inf\{\rho(x,y):\ x\in\Gamma,\ y\in\Delta\}$$

δηλαδή $\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})\le\rho(\Gamma,\Delta)$. [ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι αν A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A\subseteq B$ τότε $\inf B\le\inf A$.]

Απομένει συνεπώς να δείξουμε ότι $\rho(\Gamma,\Delta)\le\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})$. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $\rho(\Gamma,\Delta)\le\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})+\varepsilon$ ή ισοδύναμα $\rho(\Gamma,\Delta)-\varepsilon\le\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon>0$. Για να δείξουμε ότι

$$\rho(\Gamma,\Delta)-\varepsilon\le\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})=\inf\{\rho(x,y):\ x\in\overline{\Gamma},\ y\in\overline{\Delta}\}$$

αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $\rho(\Gamma,\Delta)-\varepsilon$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου που εμφανίζεται στο δεξί μέλος. Έστω $x\in\overline{\Gamma}$ και $y\in\overline{\Delta}$. Τότε υπάρχουν $x_1\in\Gamma$ και $y_1\in\Delta$ ώστε $\rho(x,x_1)<\frac{\varepsilon}{2}$ και $\rho(y,y_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. Άρα

$$\rho(\Gamma,\Delta)\le\rho(x_1,y_1)\le\rho(x_1,x)+\rho(x,y)+\rho(y,y_1)<\frac{\varepsilon}{2}+\rho(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon+\rho(x,y)$$

(όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει εφόσον $x_1\in\Gamma$ και $y_1\in\Delta$), συνεπώς $\rho(x,y)\ge\rho(\Gamma,\Delta)-\varepsilon$. Αφού δείξαμε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x\in\overline{\Gamma}$ και $y\in\overline{\Delta}$ έχουμε

$$\inf\{\rho(x,y):\ x\in\overline{\Gamma},\ y\in\overline{\Delta}\}\ge\rho(\Gamma,\Delta)-\varepsilon$$

δηλαδή $\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})\ge\rho(\Gamma,\Delta)-\varepsilon$. Αφού αυτό αποδείχθηκε για τυχόν $\varepsilon>0$ έχουμε $\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})\ge\rho(\Gamma,\Delta)$.

Επομένως $\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})=\rho(\Gamma,\Delta)$.

Θέμα 3.

(α) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο X με $x_n\xrightarrow{\rho}x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n)\xrightarrow{d}f(x_0)$. (Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\ge n_0$ να ισχύει $d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$.)

Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής άρα ειδικότερα είναι συνεχής στο σημείο x_0. Συνεπώς υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $y\in X$ με $\rho(y,x_0)<\delta$ να ισχύει $d(f(y),f(x_0))<\varepsilon$. Εφόσον $x_n\xrightarrow{\rho}x_0$ (και εφαρμόζοντας τον ορισμό για το $\delta>0$ που βρήκαμε παραπάνω), υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\ge n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_0)<\delta$. Συνεπώς, σύμφωνα με τα παραπάνω, για $n\ge n_0$ θα ισχύει $d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$. Έτσι έχει αποδειχθεί ότι $f(x_n)\xrightarrow{d}f(x_0)$.

(β) Θα αποδείξουμε ότι $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ χρησιμοποιώντας αυτό που δείξαμε στο ερώτημα (α). [Υπάρχει βέβαια και άλλη απόδειξη χρησιμοποιώντας ότι η αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό].

Έστω $y \in f(\overline{A})$. Τότε υπάρχει $x \in \overline{A}$ ώστε $y = f(x)$. Εφόσον $x \in \overline{A}$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$. Έτσι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο $f(A)$ με $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$ άρα $f(x) \in \overline{f(A)}$ δηλαδή $y \in \overline{f(A)}$.

Επομένως $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Θέμα 4.

(α) Έστω $(B_i)_{i\in I}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcap\limits_{i\in I} B_i \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $x_0 \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i$.

Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ είναι συνεκτικό, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \bigcup\limits_{i\in I} B_i \to \{0,1\}$ είναι σταθερή. Έστω λοιπόν f μια τέτοια συνάρτηση.

Για κάθε $i \in I$ ο περιορισμός της f στο B_i θα είναι συνεχής συνάρτηση (ως περιορισμός συνεχούς σε υποσύνολο). Εφόσον η $f_{|B_i} : B_i \to \{0,1\}$ είναι συνεχής και το B_i είναι συνεκτικό, η $f_{|B_i}$ θα είναι σταθερή, άρα $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in B_i$. Αφού αυτό έχει δειχθεί για τυχόν $i \in I$ έχουμε δείξει ότι $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ και άρα η f είναι σταθερή. Συνεπώς το σύνολο $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ είναι συνεκτικό.

(β) Θεωρούμε το σύνολο $A = ([-1,0]\times[-1,0])\cup([0,1]\times[0,1])$. Το σύνολο $B_1 = [-1,0]\times[-1,0]$ είναι συνεκτικό ως καρτεσιανό γινόμενο δύο συνεκτικών συνόλων (το $[-1,0]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ αφού είναι διάστημα) και το $B_2 = [0,1]\times[0,1]$ είναι συνεκτικό για τον ίδιο λόγο. Εφόσον $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ (διότι $(0,0) \in B_1 \cap B_2$), σύμφωνα με το ερώτημα (α) το σύνολο $A = B_1 \cup B_2$ είναι συνεκτικό.

Όπως εύκολα βλέπουμε $A^o = \big((-1,0)\times(-1,0)\big) \cup \big((0,1)\times(0,1)\big)$. Το A^o δεν είναι συνεκτικό διότι τα $(-1,0)\times(-1,0)$ και $(0,1)\times(0,1)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ άρα και του A^o, μη κενά και ξένα.

Θέμα 5.

(α) Για να δείξουμε ότι το K είναι κλειστό αρκεί (σύμφωνα με τον ορισμό) να δείξουμε ότι το συμπλήρωμα του, δηλαδή το σύνολο $X \setminus K$, είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Έστω λοιπόν $y \in X \setminus K$ (και θα δείξουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(y,\varepsilon) \subseteq X \setminus K$). Για κάθε $x \in K$ έχουμε $x \neq y$ (διότι $x \in K$ και $y \in X \setminus K$). Έτσι για $\varepsilon_x = \frac{\rho(x,y)}{2}$ έχουμε $\varepsilon_x > 0$ και $B_\rho(x,\varepsilon_x) \cap B_\rho(y,\varepsilon_x) = \emptyset$.

Η οικογένεια συνόλων $(B_\rho(x,\varepsilon_x))_{x\in K}$ αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X και $K \subseteq \bigcup\limits_{x\in K} B_\rho(x,\varepsilon_x)$. Εφόσον το K είναι συμπαγές υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $x_1,\dots,x_n \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\rho(x_i,\varepsilon_{x_i})$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1},\dots,\varepsilon_{x_n}\}$. Τότε για κάθε $i = 1,\dots,n$ έχουμε $B_\rho(y,\varepsilon) \subseteq B_\rho(y,\varepsilon_{x_i})$ και άρα $B_\rho(y,\varepsilon) \cap B_\rho(x,\varepsilon_{x_i}) \subseteq B_\rho(y,\varepsilon_{x_i}) \cap B_\rho(x,\varepsilon_{x_i}) = \emptyset$.

Συνεπώς $B_\rho(y,\varepsilon) \cap K \subseteq B_\rho(y,\varepsilon) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\rho(x_i,\varepsilon_{x_i}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (B_\rho(y,\varepsilon) \cap B_\rho(x,\varepsilon_{x_i})) = \emptyset$ επομένως $B_\rho(y,\varepsilon) \subseteq X \setminus K$.

Έτσι αποδείχθηκε ότι το σύνολο $X \setminus K$ είναι ανοικτό και άρα το K είναι κλειστό.

(β) Έστω $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του Y ώστε $f(K) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ Τότε

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

Για κάθε $i \in I$, εφόσον το A_i είναι ανοικτό υποσύνολο του Y και η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(A_i)$ θα είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Εφόσον το K είναι συμπαγές υπάρχει $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} f^{-1}(A_i)$. Άρα $f(K) \subseteq f(\bigcup\limits_{i\in J} f^{-1}(A_i)) = \bigcup\limits_{i\in J} f(f^{-1}(A_i))$ και εφόσον $f(f^{-1}(A_i)) \subseteq A_i$ για κάθε i προκύπτει ότι $f(K) \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} A_i$.

Επομένως το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Θέμα 6.

(α) Έστω (X, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και A κλειστό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι το A είναι πλήρες. (Πρέπει να δείξουμε δηλαδή ότι για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A υπάρχει $x \in A$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.)

Έστω λοιπόν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία του A. Εφόσον $A \subseteq X$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο X και εφόσον ο (X, ρ) είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αφού το A είναι κλειστό, $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$ προκύπτει ότι $x \in A$ (εδώ χρησιμοποιήσαμε τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων με ακολουθίες). Επομένως το A είναι πλήρες.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και B ένα πλήρες υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι το B είναι κλειστό. (Σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων με ακολουθίες αρκεί να δείξουμε ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο B και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $x \in B$).

Έστω λοιπόν ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο B και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Εφόσον η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα είναι βασική. Έτσι, εφόσον το B είναι πλήρες και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο B, υπάρχει $y \in B$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} y$. Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $x_n \xrightarrow{\rho} y$ από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει ότι $x = y$ και άρα $x \in B$. Η απόδειξη είναι πλήρης.

(γ) Για να δείξουμε ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης πρέπει να δείξουμε ότι κάθε βασική ακολουθία του X είναι συγκλίνουσα. Έστω λοιπόν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαία βασική ακολουθία στο X. Εφόσον το D είναι πυκνό υποσύνολο του X για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n \in \overline{D}$ και άρα υπάρχει $y_n \in D$ με $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$.

(Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση της άσκησης πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.)

Ισχυρισμός: Η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{3}$. Εφόσον η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n.m \geq n_2$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$\rho(y_n, y_m) \leq \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Άρα η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του D.

Από την υπόθεση υπάρχει $y \in X$ ώστε $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \rho(x_n, y) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y) \leq \frac{1}{n} + \rho(y_n, y).$$

Εφόσον $\frac{1}{n} \to 0$ και $\rho(y_n, y) \to 0$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει ότι $\rho(x_n, y) \to 0$ δηλαδή $x_n \xrightarrow{\rho} y$. Επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Αποδείχθηκε ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης.